ジョルダン標準形による対角化解法

― 特性方程式の判別式 D=0 の場合 ―

概要

ここでは、微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2}=b\dfrac{dx}{dt}+ax$ を例にとり、その特性方程式の判別式が D=0 であった場合について、その対角化解法を示す。判別式 D=0 の場合、これに対応する作用マトリックスの固有値は重解をもつ。この場合はジョルダン標準形によって対角化し、解を得ることができる。

方程式の場合分けとその解

与えられた方程式の判別式*)は、

$$D=b^2+4a$$

であり、D=0 だから、

$$b^2+4a=0$$

より、ここでは a と b との関係を以下の３通りとし、

$$a=-\frac{b^2}{4}\quad,\qquad b=\sqrt{-4a}\quad,\qquad b=-\sqrt{-4a}$$

これらを、それぞれ与えられた方程式に代入すると、以下の３つの微分方程式を得る。

$$\frac{d^2x}{dt^2}=b\frac{dx}{dt}-\frac{b^2}{4}x \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1.1)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\sqrt{-4a}\,\frac{dx}{dt}+ax \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1.2)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\sqrt{-4a}\,\frac{dx}{dt}+ax \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1.3)$$

これらはいずれも、与えられた微分方程式のうち判別式 D=0 に関するものである。それぞれの解は、初期値を $x(0)=x0, x'(0)=x1$ として

(1.1)の解 $$x=x0\exp\left(\frac{bt}{2}\right)+\left(x1-\frac{x0\cdot b}{2}\right)\exp\left(\frac{bt}{2}\right)\cdot t$$

(1.2)の解 $$x=x0\exp\left(\sqrt{a}t\right)+\left(x1-x0\sqrt{-a}\right)\exp\left(\sqrt{a}t\right)\cdot t$$

(1.3)の解 $$x=x0\exp\left(-\sqrt{-a}t\right)+\left(x1+x0\sqrt{-a}\right)\exp\left(-\sqrt{-a}t\right)\cdot t$$

---

*) なお、作用マトリックスから特性方程式を導く方法については別項の「$\frac{d^2x}{dt^2}=b\frac{dx}{dt}+ax$ の作用マトリックス表現」を参照されたい。

また同項に示される E に関する式の√の中身が判別式 D に相当する。

対角化解法

　ここからは、さきほどの３つの方程式の対角化解法を行う。まず方程式(1.1)についてその作用マトリックス表現と対角化解法について詳しく示し検算も行う。残りの２つはバリエーションであるから簡単に示す。
　まず、(1.1)の漸化式表現は、

$$x''_{n+1} = bx'_n - \frac{b^2}{4} x_n$$

である。これを作用マトリックスの基本形式[1]を漸化式に直したものに代入すると、

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta x'_n \\ x'_{n+1} &= x'_n + \Delta x''_n \\ x''_{n+1} &= bx'_n - \frac{b^2}{4} x_n \end{aligned}$$

ここで、下段の式を中段の式に代入して整理すると（ただし $x''_{n+1} \approx x''_n$）

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta x'_n \\ x'_{n+1} &= (1+\Delta b)x'_n - \frac{b^2}{4} x_n \end{aligned}$$

であるから、(1.1)式の作用マトリックス表現は、

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta \\ -\frac{b^2}{4}\Delta & 1+b\Delta \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x0 \\ x1 \end{bmatrix}$$

この作用マトリックスは重解をもつからジョルダン標準形で対角化すると、

$$P\Lambda^n P^{-1} x0 = \begin{bmatrix} -\frac{b\Delta}{2} & 1 \\ -\frac{b^2\Delta}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+\frac{b\Delta}{2} & 1 \\ 0 & 1+\frac{b\Delta}{2} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{b^2\Delta} \\ 1 & -\frac{2}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x0 \\ x1 \end{bmatrix}$$

となり、Λの n 乗を各要素にもっていくと[2]、

$$= \begin{bmatrix} -\frac{b\Delta}{2} & 1 \\ -\frac{b^2\Delta}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(1+\frac{b\Delta}{2}\right)^n & n\left(1+\frac{b\Delta}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & \left(1+\frac{b\Delta}{2}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{b^2\Delta} \\ 1 & -\frac{2}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x0 \\ x1 \end{bmatrix}$$

である。これをまとめると、

$$
=\begin{bmatrix}
\left(-\frac{b\Delta n}{2}\left(1+\frac{b\Delta}{2}\right)^{n-1}+\left(1+\frac{b\Delta}{2}\right)^{n}\right)x0+\left(\frac{2}{b}\left(1+\frac{b\Delta}{2}\right)^{n}-\frac{2}{b}\left(-\frac{b\Delta n}{2}\left(1+\frac{b\Delta}{2}\right)^{n-1}+\left(1+\frac{b\Delta}{2}\right)^{n}\right)\right)x1 \\
-\frac{b^2\Delta n x0}{4}\left(1+\frac{b\Delta}{2}\right)^{n-1}+\left(\left(1+\frac{b\Delta}{2}\right)^{n}+\frac{b\Delta n}{2}\left(1+\frac{b\Delta}{2}\right)^{n-1}\right)x1
\end{bmatrix}
$$

であり整理すると、

$$
=\begin{bmatrix}
\left(1+\frac{b\Delta}{2}\right)^{n}x0+\left(x1-\frac{x0\cdot b}{2}\right)\left(1+\frac{b\Delta}{2}\right)^{n-1}\Delta n \\
\left(\frac{x1b}{2}-\frac{x0b^2}{4}\right)\left(1+\frac{b\Delta}{2}\right)^{n-1}\Delta n+\left(1+\frac{b\Delta}{2}\right)^{n}x1
\end{bmatrix}
$$

ここで、n=t/Δとし Δ→0 とすると、

$$
P\Lambda^n P^{-1}x0 \to \begin{bmatrix}
x0\exp\left(\frac{bt}{2}\right)+\left(x1-\frac{x0\cdot b}{2}\right)\exp\left(\frac{bt}{2}\right)\cdot t \\
\left(\frac{x1\cdot b}{2}-\frac{x0\cdot b^2}{4}\right)\exp\left(\frac{bt}{2}\right)\cdot t+x1\exp\left(\frac{bt}{2}\right)
\end{bmatrix}
$$

となり、(1.1)式の解と同じものを得る。

ここで検算を行っておくと、PP^{-1} は単位行列に、

$$
PP^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{b\Delta}{2} & 1 \\ -\frac{b^2\Delta}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{b^2\Delta} \\ 1 & -\frac{2}{b} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$P^{-1}AP$ はΛとなっている。

$$
P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{b^2\Delta} \\ 1 & -\frac{2}{b} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \Delta \\ -\frac{b^2}{4}\Delta & 1+b\Delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{b\Delta}{2} & 1 \\ -\frac{b^2\Delta}{2} & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} 1+\frac{b\Delta}{2} & 1 \\ -\frac{b\Delta}{2}\left(1+\frac{b\Delta}{2}\right)-\frac{b^2\Delta}{4}\left(\Delta-\frac{2(1+b\Delta)}{b}\right) & 1+\frac{b\Delta}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+\frac{b\Delta}{2} & 1 \\ 0 & 1+\frac{b\Delta}{2} \end{bmatrix}\equiv\Lambda
$$

さて、以降は(1.2),(1.3)について簡単に示すことにする。

(1.2)式の対角化とその解

(1.2)式とその解をあらためて示しておくと、

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\sqrt{-4a}\,\frac{dx}{dt}+ax$$

$$x=x0\exp\left(\sqrt{at}\right)+\left(x1-x0\sqrt{-a}\right)\exp\left(\sqrt{at}\right)\cdot t$$

(1.1)式と同様にして(1.2)式の作用マトリックス表現を得ると、

$$\begin{bmatrix} x \\ \\ x' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \Delta \\ \\ a\Delta & 1+\sqrt{-4a}\Delta \end{bmatrix}^n\begin{bmatrix} x0 \\ \\ x1 \end{bmatrix}$$

である。この対角化は、a によって場合分けされ、

$$P\Lambda^n P^{-1}x0=\begin{bmatrix} -\sqrt{-a}\Delta & 1 \\ \\ a\Delta & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \left(1+\sqrt{-a}\Delta\right)^n & n\left(1+\sqrt{-a}\Delta\right)^{n-1} \\ \\ 0 & \left(1+\sqrt{-a}\Delta\right)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{a\Delta} \\ \\ 1 & \dfrac{K1}{\sqrt{a}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x0 \\ \\ x1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ただし}\,K1=\begin{cases} \sqrt{-1} & a>0 \\ \sqrt{-a} & a<0 \end{cases}$$

である。これをまとめると、

$$\begin{bmatrix} \left(-\sqrt{-a}\Delta n\left(1+\sqrt{-a}\Delta\right)^{n-1}+\left(1+\sqrt{-a}\Delta\right)^n\right)x0+\left(\dfrac{-\left(1+\sqrt{-a}\Delta\right)^n-\sqrt{-a}\Delta n\left(1+\sqrt{-a}\Delta\right)^{n-1}+\left(1+\sqrt{-a}\Delta\right)^n}{\sqrt{a}\cdot K2}K1\right)x1 \\ a\Delta n\cdot x0\left(1+\sqrt{-a}\Delta\right)^{n-1}+\left(\left(1+\sqrt{-a}\Delta\right)^n+\sqrt{-a}\Delta n\left(1+\sqrt{-a}\Delta\right)^{n-1}\right)x1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ただし、}K1=\begin{cases} \sqrt{-1} & a>0 \\ \sqrt{-a} & a<0 \end{cases}\quad ,\quad K2=\begin{cases} 1 & a>0 \\ \sqrt{a} & a<0 \end{cases}$$

となる。これを整理して、n=t/Δとし Δ→0 とすると、a に関わらずいずれも、

$$P\Lambda^n P^{-1}x0\rightarrow\begin{bmatrix} x0\exp\left(\sqrt{at}\right)+\left(x1-x0\sqrt{-a}\right)\exp\left(\sqrt{at}\right)\cdot t \\ \\ \left(ax0+x1\sqrt{-a}\right)\exp\left(\sqrt{-at}\right)\cdot t+x1\exp\left(\sqrt{-at}\right) \end{bmatrix}$$

検算については省略するが、PP^{-1} は単位行列に、$P^{-1}AP$ は Δ^2 の項を 0 とみなせば Λ となっている。

(1.3)式の対角化とその解

(1.3)式とその解は、

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\sqrt{-4a}\frac{dx}{dt} + ax$$

$$x = x0\exp\left(-\sqrt{-a}t\right) + \left(x1 + x0\sqrt{-a}\right)\exp\left(-\sqrt{-a}t\right)\cdot t$$

であり、その作用マトリックス表現は、

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta \\ a\Delta & 1-\sqrt{-4a}\Delta \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x0 \\ x1 \end{bmatrix}$$

である。この対角化も、さきほどと同様、a によって場合分けされ、

$$P\Lambda^n P^{-1}x0 = \begin{bmatrix} \sqrt{-a}\Delta & 1 \\ a\Delta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(1-\sqrt{-a}\Delta\right)^n & n\left(1-\sqrt{-a}\Delta\right)^{n-1} \\ 0 & \left(1-\sqrt{-a}\Delta\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{a\Delta} \\ 1 & -\dfrac{K}{\sqrt{a}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x0 \\ x1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ただし}\,K = \begin{cases} \sqrt{-1} & a > 0 \\ \sqrt{-a} & a < 0 \end{cases}$$

である。これをまとめると、

$$\begin{bmatrix} \left(\sqrt{-a}\Delta n\left(1-\sqrt{-a}\Delta\right)^{n-1} + \left(1-\sqrt{-a}\Delta\right)^n\right)x0 + \left(\dfrac{\left(1-\sqrt{-a}\Delta\right)^n - \sqrt{-a}\Delta n\left(1-\sqrt{-a}\Delta\right)^{n-1} + \left(1-\sqrt{-a}\Delta\right)^n}{\sqrt{a}\cdot K2}K1\right)x1 \\ a\Delta n\cdot x0\left(1-\sqrt{-a}\Delta\right)^{n-1} + \left(\left(1-\sqrt{-a}\Delta\right)^n - \sqrt{-a}\Delta n\left(1-\sqrt{-a}\Delta\right)^{n-1}\right)x1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ただし、}K1 = \begin{cases} \sqrt{-1} & a > 0 \\ \sqrt{-a} & a < 0 \end{cases} \quad , \quad K2 = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ \sqrt{a} & a < 0 \end{cases}$$

となる。これを整理して、n=t/Δとしᐃ→0 とすると、a に関わらずいずれも、

$$P\Lambda^n P^{-1}x0 \to \begin{bmatrix} x0\exp\left(-\sqrt{-a}t\right) + \left(x1 + x0\sqrt{-a}\right)\exp\left(-\sqrt{-a}t\right)\cdot t \\ \left(ax0 - x1\sqrt{-a}\right)\exp\left(-\sqrt{-a}t\right)\cdot t + x1\exp\left(-\sqrt{-a}t\right) \end{bmatrix}$$

ここでも、検算については省略するが、PP^{-1} は単位行列に、$P^{-1}AP$ は Δ^2 の項を 0 とみなせば Λ となっていることを確認した。

参考文献

[1] S. Naganuma. Reports of Path Finder Physics, Vol.1, pp.1-10 (2002)
[2] 長沼伸一郎著,物理数学の直観的方法 第２版 (通商産業研究社), p.38

2005.5.16