

微分方程式の対角化解法に関する一般的手順

概要

ここでは、微分方程式の作用マトリックス表現およびその対角化解法に至るまでの一般的な手順について述べる。

これによりある微分方程式の作用マトリックス表現を得たい場合には、その手順さえ踏めばこれを完了することができる。この手順は、線形、非線形の微分方程式および連立微分方程式についてその有効性が確認されている。ただし、微分方程式の解が級数によって表示されるようなものに関しては未確認である。

この手順は、作用マトリックスのいわば基本形式^[1]を土台としておりその有効性にも関わらず非常にシンプルである。以降、1章において、作用マトリックスの基本形と本稿の主題である一般的手順について示した後に、2章ではいくつかの例に対してこの手順を適用し実際に微分方程式を作用マトリックス表現に置き換える。3章では、置き換えた作用マトリックスを対角化したものから、もとの微分方程式の解が得られることを確認する。

1. 一般的手順

本章では、作用マトリックスと微分方程式を橋渡しする一般的な手順について示す。概要に述べた通り、この手順の土台には「微分方程式の対角化解法」^[1]における補遺の項で述べられた形式がある。ここではこれを、作用マトリックスの基本形式と呼ぶことにして、まずこれから示した後に手順について述べることにする。

1.1. 作用マトリックスの基本形式

右に示したものが作用マトリックスの基本形式である。

さらに、これについて変数を f から x に書き換えた後に、漸化式表示したものが以下に示す形式である。

この形式をもとに手順を進めることになる。

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x'_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+1}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta & & \\ & 1 & \Delta & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x'_n \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_{n+1} = x_n + \Delta x'_n \\ x'_{n+1} = x'_n + \Delta x''_n \\ \vdots \\ x_{n+1}^{(k)} = x_n^{(k)} + \Delta x_n^{(k+1)} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & 1 & \Delta & & \\ & & 1 & \Delta & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ f \\ f' \\ f'' \\ \vdots \end{bmatrix}$$

1.1.1 基本形式

1.1.2 基本形式の漸化式表示

1.2 微分方程式から作用マトリックス表現への手順

ここでは、2章以降で実際に行う作用マトリックスと微分方程式を橋渡す際の一般的な手順について示す。なお、右に手順の例を合わせて示しておく。

1. 与えられた微分方程式を漸化式に書き換える。
2. これを基本形式(1.1.2)の同一階数の所に置く。
3. Δ を1次までとし階数を可能な限り下げる。
(ただし、最終的に1行のみになり行列にならない場合はその手前の階数にとどめる)

である。与えられた微分方程式が変数分離系でない場合得られた漸化式を、そのまま作用マトリックスに書き換えればよい。

一方、変数分離系あるいは非線形の場合は、

4. 漸化式の右辺を、左辺と同名な変数でくり出す。
5. 残った変数名によって作動するスイッチ演算子を定義。
6. スイッチ演算子に掛かる係数は相互作用成分とする。

である。

以上をまとめると結局は、基本形式を漸化式表示したものに対して、与えられた微分方程式を代入し変形してゆけばよい。ということである。

2. 微分方程式の作用マトリックス表現

本章では、ここまで示してきた手順を、いくつかの微分方程式に適用して、その作用マトリックス表現を実際に導く。ここで扱う微分方程式は以下のものである。なおスペースの都合上、本章に限りによって書式を2段組にした。

2.1 微分方程式 $\frac{d^2x}{dt^2} = b \frac{dx}{dt} + ax$

2.2 微分方程式 $\frac{dx}{dt} = ax^2$

2.3 連成振動 $\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + k_1(y-x) \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = -ky - k_1(y-x) \end{cases}$

2.4 ロトカ・ヴォルテラ $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + gxy \end{cases}$

1. $\frac{d^2x}{dt^2} = ax \rightarrow x''_{n+1} = ax_n$
2.
$$\begin{array}{l} x_{n+1} = x_n + \Delta x'_n \\ x'_{n+1} = x'_n + \Delta x''_n \\ \vdots \\ x^{(k)}_{n+1} = x^{(k)}_n + \Delta x^{(k-1)}_n \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} x_{n+1} = x_n + \Delta x'_n \\ x'_{n+1} = x'_n + \Delta x''_n \\ x''_{n+1} = ax_n \end{array}$$
3.
$$\begin{array}{l} x_{n+1} = x_n + \Delta x'_n \\ x'_{n+1} = x'_n + \Delta x''_n \\ x''_{n+1} = ax_n \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} x_{n+1} = x_n + \Delta x'_n \\ x'_{n+1} = a\Delta \cdot x_n + x'_n \\ x''_{n+1} = ax_n \end{array} \quad (\text{ただし } x''_{n+1} \approx x''_n)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x'_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta \\ a\Delta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x'_n \end{bmatrix}$$

$$\vdots \quad x_{n+1} = x_n + \Delta t \cdot x$$

4. $x_{n+1} = x_n(1 + \Delta t)$

5. $x_{n+1} = x_n(1 + \Delta S(t))$

6. $x_{n+1} = x_n + \Delta S(t) \cdot x_n$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ R_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta \\ S(x) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ R_n \end{bmatrix}$$

2.1 微分方程式 $\frac{d^2x}{dt^2} = b \frac{dx}{dt} + ax$

の作用マトリックス表現

では実際に手順を用いて作用マトリックス表現を導いてみる。手順を実行すると、

2.1.1 与式を漸化式に書き換える

$$\frac{d^2x}{dt^2} = b \frac{dx}{dt} + ax \quad \rightarrow \quad x''_{n+1} = bx'_n + ax_n$$

2.1.2 基本形式(1.1.2)の同一階数に置く

$$\begin{array}{l} x_{n+1} = x_n + \Delta x'_n \\ x'_{n+1} = x'_n + \Delta x''_n \\ \vdots \\ x_{n+1}^{(k)} = x_n^{(k)} + \Delta x_n^{(k-1)} \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} x_{n+1} = x_n + \Delta x'_n \\ x'_{n+1} = x'_n + \Delta x''_n \\ x''_{n+1} = bx'_n + ax_n \end{array}$$

2.1.3 Δ を1次までとし階数を可能な限り下げる。
(ただし、最終的に1行のみになり
行列にならない場合はその手前の
階数にとどめる)

$$\begin{array}{l} x_{n+1} = x_n + \Delta x'_n \\ x'_{n+1} = a\Delta \cdot x_n + (1 + \Delta b)x'_n \\ \text{(ただし } x''_{n+1} \approx x''_n \text{)} \end{array}$$

となり、得られた漸化式を、そのまま作用マトリックスに表現すると、

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x'_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta \\ a\Delta & 1 + b\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x'_n \end{bmatrix}$$

であり、最終的には、

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta \\ a\Delta & 1 + b\Delta \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{bmatrix}$$

2.2 微分方程式 $\frac{dx}{dt} = ax^2$

の作用マトリックス表現

この微分方程式は非線形であり、変数分離形のものである。このような場合、手順6まで実行することになる。

2.2.1 与式を漸化式に書き換える

$$\frac{dx}{dt} = ax^2 \quad \rightarrow \quad x'_{n+1} = ax_n^2$$

2.2.2 基本形式(1.1.2)の同一階数に置く

$$\begin{array}{l} x_{n+1} = x_n + \Delta x'_n \\ x'_{n+1} = ax_n^2 \end{array}$$

2.2.3 Δ を1次までとし階数を可能な限り下げる。

$$x_{n+1} = x_n + \Delta ax_n^2 \quad \text{ただし } x'_{n+1} \approx x'_n$$

2.2.4 漸化式の右辺をくくり出す

$$x_{n+1} = x_n(1 + \Delta ax_n)$$

2.2.5 スイッチ演算子を定義

$$x_{n+1} = x_n(1 + \Delta aS(x_n))$$

2.2.6 スイッチ演算子に掛かる係数は相互作用成分とする

$$x_{n+1} = x_n + \Delta aS(x_n) \cdot x_n$$

となり、作用マトリックスに表現すると、

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ R_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta a \\ S(x) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ R_n \end{bmatrix}$$

であり、これを展開したものと、最終的な結果を合わせて示すと以下の通りである。

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1 + \Delta a)x_n - \Delta a \beta \cdot R_n \\ R_{n+1} &= S(x)x_n \quad (R_{n+1} \approx R_n) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta a \\ S(x) & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x_0 \\ R \end{bmatrix}$$

確かに 2.2.6 の式を表現している。

2.3 連成振動 $\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + k_1(y-x) \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - k_1(y-x) \end{cases}$ の作用

マトリックス表現

これは連立された微分方程式である。手順を実行すると、

2.3.1 与式を漸化式に書き換える

$$\begin{aligned} mx''_{n+1} &= -kx_n + k_1(y_n - x_n) \\ my''_{n+1} &= -ky_n - k_1(y_n - x_n) \end{aligned}$$

2.3.2 基本形式(1.1.2)の同一階数に置く

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta x'_n \\ x'_{n+1} &= x'_n + \Delta x''_n \\ mx''_{n+1} &= -kx_n + k_1(y_n - x_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \Delta y'_n \\ y'_{n+1} &= y'_n + \Delta y''_n \\ my''_{n+1} &= -ky_n - k_1(y_n - x_n) \end{aligned}$$

2.3.3 Δ を1次までとし階数を可能な限り下げる。

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta x'_n \\ x'_{n+1} &= x'_n + \left(\frac{-k - k_1}{m} \right) \Delta x_n + \frac{k_1}{m} \Delta y_n \end{aligned}$$

ただし、 $x''_{n+1} \approx x''_n$

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \Delta y'_n \\ y'_{n+1} &= y'_n + \left(\frac{-k - k_1}{m} \right) \Delta y_n + \frac{k_1}{m} \Delta x_n \end{aligned}$$

ただし、 $y''_{n+1} \approx y''_n$

となり、得られた漸化式を、そのまま作用マトリックスに表現すると、

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x'_{n+1} \\ y_{n+1} \\ y'_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta & 0 & 0 \\ -\Delta \frac{k+k_1}{m} & 1 & \Delta \frac{k_1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta \\ \Delta \frac{k_1}{m} & 0 & -\Delta \frac{k+k_1}{m} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x'_n \\ y_n \\ y'_n \end{bmatrix}$$

であり、最終的には、

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta & 0 & 0 \\ -\Delta \frac{k+k_1}{m} & 1 & \Delta \frac{k_1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta \\ \Delta \frac{k_1}{m} & 0 & -\Delta \frac{k+k_1}{m} & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

となる。

2.4 ロトカ・ヴォルテラ
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + gxy \end{cases}$$

$$x_{n+1} = x_n(1 + \Delta a - \Delta b S(y_n))$$

$$y_{n+1} = y_n(1 - \Delta c + \Delta g S(x_n))$$

の作用マトリックス表現

これは連立された非線形の微分方程式である。
これは変数分離形であるから、手順6まで実行することになる。

2.3.1 与式を漸化式に書き換える

$$x'_{n+1} = ax_n - bx_n y_n$$

$$y'_{n+1} = -cy_n + gx_n y_n$$

2.3.2 基本形式(1.1.2)の同一階数に置く

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x'_n$$

$$x'_{n+1} = ax_n - bx_n y_n$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y'_n$$

$$y'_{n+1} = -cy_n + gx_n y_n$$

2.3.3 Δ を1次までとし階数を可能な限り下げる。

$$x_{n+1} = x_n + \Delta ax_n - \Delta bx_n y_n$$

$$y_{n+1} = y_n - \Delta cy_n + \Delta gx_n y_n$$

2.3.4 漸化式の右辺をくくり出す

$$x_{n+1} = x_n(1 + \Delta a - \Delta b y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n(1 - \Delta c + \Delta g x_n)$$

2.3.5 スイッチ演算子を定義

2.2.6 スイッチ演算子に掛かる係数は相互作用成分とする

$$x_{n+1} = x_n + \Delta ax_n - \Delta b \cdot S(y_n)x_n$$

$$y_{n+1} = y_n - \Delta cy_n + \Delta g \cdot S(x_n)y_n$$

となり、作用マトリックスに表現すると、

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ R_{n+1} \\ r_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + a\Delta & 0 & -\Delta b & 0 \\ 0 & 1 - c\Delta & 0 & \Delta g \\ S(y_n) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S(x_n) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ R_n \\ r_n \end{bmatrix}$$

であり、展開すると

$$\begin{bmatrix} (1 + a\Delta)x_n - \Delta bR_n \\ (1 - c\Delta)y_n + \Delta gr_n \\ S(y_n)x_n \\ S(x_n)y_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_n + \Delta ax_n - \Delta b \cdot S(y_n)x_n \\ y_n - \Delta cy_n + \Delta g \cdot S(x_n)y_n \\ \\ \end{matrix}$$

ただし $(R_{n+1} \approx R_n), (r_{n+1} \approx r_n)$

となり確かに 2.2.6 の式を表現している。

よって最終的に、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ R \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + a\Delta & 0 & -\Delta b & 0 \\ 0 & 1 - c\Delta & 0 & \Delta g \\ S(y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S(x) & 0 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ R_0 \\ r_0 \end{bmatrix}$$

となる。

3. 微分方程式との対応を確認

ここでは、2章において作用マトリックスで表現したものを対角化解法によって解くことで、もとの微分方程式と対応していることを確認する。まず 2.1, 2.3 について示した後、2.2, 2.4 について示す。

3.1 2.1 の対角化

まず、2.1 の微分方程式とその解は*)、

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = b \frac{dx}{dt} + ax \quad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ x'(0) = x_1 \end{cases}$$

$$x = \frac{\left\{ 2 \cdot x_1 + \left(\sqrt{b^2 + 4a} - b \right) x_0 \right\} \exp\left(\frac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2} t \right)}{2 \left(\sqrt{b^2 + 4a} \right)} - \frac{\left\{ 2 \cdot x_1 - \left(\sqrt{b^2 + 4a} + b \right) x_0 \right\} \exp\left(\frac{b - \sqrt{b^2 + 4a}}{2} t \right)}{2 \left(\sqrt{b^2 + 4a} \right)}$$

であり、この作用マトリックス表現は、

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta \\ a\Delta & 1 + b\Delta \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{bmatrix}$$

であった。これを対角化し整理して、 $n=t/\Delta$ として、 $\Delta \rightarrow 0$ を実行すると、

$$P\Lambda^n P^{-1}x_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{b + \sqrt{b^2 + 4a}} & \frac{1}{b - \sqrt{b^2 + 4a}} \\ \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2} & \frac{b - \sqrt{b^2 + 4a}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2} \Delta & 0 \\ 0 & 1 + \frac{b - \sqrt{b^2 + 4a}}{2} \Delta \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} -\frac{b - \sqrt{b^2 + 4a}}{2\sqrt{b^2 + 4a}} & \frac{1}{\sqrt{b^2 + 4a}} \\ \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2\sqrt{b^2 + 4a}} & -\frac{1}{\sqrt{b^2 + 4a}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$P\Lambda^n P^{-1}x_0 \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\left\{ 2 \cdot x_1 + \left(\sqrt{b^2 + 4a} - b \right) x_0 \right\} \exp\left(\frac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2} t \right)}{2 \left(\sqrt{b^2 + 4a} \right)} - \frac{\left\{ 2 \cdot x_1 - \left(\sqrt{b^2 + 4a} + b \right) x_0 \right\} \exp\left(\frac{b - \sqrt{b^2 + 4a}}{2} t \right)}{2 \left(\sqrt{b^2 + 4a} \right)} \\ \frac{\left\{ 2a \cdot x_0 + \left(\sqrt{b^2 + 4a} + b \right) x_1 \right\} \exp\left(\frac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2} t \right)}{2 \left(\sqrt{b^2 + 4a} \right)} + \frac{\left\{ -2a \cdot x_0 + \left(\sqrt{b^2 + 4a} - b \right) x_1 \right\} \exp\left(\frac{b - \sqrt{b^2 + 4a}}{2} t \right)}{2 \left(\sqrt{b^2 + 4a} \right)} \end{bmatrix}$$

であり、微分方程式の解と全く同じものが得られたことから、正しく対応していると言える*)。

*) なお判別式 $D=0$ の場合については別項の「ジョルダン標準形による対角化解法」を参照。

3.2 2.3 の対角化

2.3 は連立微分方程式であった、これとその解は、

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + k_1(y-x) \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - k_1(y-x) \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ x'(0) = x_1 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases}$$

$$x = \frac{\sqrt{m}(y_1 + x_1)}{2\sqrt{k}} \sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right) + \left(\frac{y_0 + x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right) + \frac{\sqrt{m}(-y_1 + x_1)}{2\sqrt{2k_1 + k}} \sin\left(\frac{\sqrt{2k_1 + kt}}{\sqrt{m}}\right) + \left(\frac{-y_0 + x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{2k_1 + kt}}{\sqrt{m}}\right)$$

$$y = \frac{\sqrt{m}(y_1 + x_1)}{2\sqrt{k}} \sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right) + \left(\frac{y_0 + x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right) - \frac{\sqrt{m}(-y_1 + x_1)}{2\sqrt{2k_1 + k}} \sin\left(\frac{\sqrt{2k_1 + kt}}{\sqrt{m}}\right) - \left(\frac{-y_0 + x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{2k_1 + kt}}{\sqrt{m}}\right)$$

であり、この作用マトリックス表現は、

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta & 0 & 0 \\ -\Delta \frac{k+k_1}{m} & 1 & \Delta \frac{k_1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta \\ \Delta \frac{k_1}{m} & 0 & -\Delta \frac{k+k_1}{m} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

であった。さきほどと同様に対角化し、 $\Delta \rightarrow 0$ を実行すると、正しく対応している事がわかる。

$$P \Lambda^n P^{-1} x_0 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{-mk-2mk_1}}{m} & \frac{\sqrt{-mk-2mk_1}}{m} & \frac{\sqrt{-mk}}{m} & -\frac{\sqrt{-mk}}{m} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{-mk-2mk_1}}{m} & -\frac{\sqrt{-mk-2mk_1}}{m} & \frac{\sqrt{-mk}}{m} & -\frac{\sqrt{-mk}}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + \frac{\sqrt{-mk-2mk_1}\Delta}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\sqrt{-mk-2mk_1}\Delta}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{\sqrt{-mk}\Delta}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{\sqrt{-mk}\Delta}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{-m}{4\sqrt{-mk-2mk_1}} & \frac{1}{4} & \frac{m}{4\sqrt{-mk-2mk_1}} \\ \frac{-1}{4} & \frac{m}{4\sqrt{-mk-2mk_1}} & \frac{1}{4} & \frac{-m}{4\sqrt{-mk-2mk_1}} \\ \frac{1}{4} & \frac{m}{4\sqrt{-mk}} & \frac{1}{4} & \frac{m}{4\sqrt{-mk}} \\ \frac{1}{4} & \frac{-m}{4\sqrt{-mk}} & \frac{1}{4} & \frac{-m}{4\sqrt{-mk}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$P \Lambda^n P^{-1} x_0 \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{m}(y_1 + x_1)}{2\sqrt{k}} \sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right) + \left(\frac{y_0 + x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right) + \frac{\sqrt{m}(-y_1 + x_1)}{2\sqrt{2k_1 + k}} \sin\left(\frac{\sqrt{2k_1 + kt}}{\sqrt{m}}\right) + \left(\frac{-y_0 + x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{2k_1 + kt}}{\sqrt{m}}\right) \\ \frac{(y_1 + x_1)}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right) - \left(\frac{y_0 + x_0}{2\sqrt{m}}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right) + \frac{(-y_1 + x_1)}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{2k_1 + kt}}{\sqrt{m}}\right) - \left(\frac{-y_0 + x_0}{2\sqrt{m}}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{2k_1 + kt}}{\sqrt{m}}\right) \\ \frac{\sqrt{m}(y_1 + x_1)}{2\sqrt{k}} \sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right) + \left(\frac{y_0 + x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right) - \frac{\sqrt{m}(-y_1 + x_1)}{2\sqrt{2k_1 + k}} \sin\left(\frac{\sqrt{2k_1 + kt}}{\sqrt{m}}\right) - \left(\frac{-y_0 + x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{2k_1 + kt}}{\sqrt{m}}\right) \\ \frac{(y_1 + x_1)}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right) - \left(\frac{y_0 + x_0}{\sqrt{m}}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right) - \frac{(-y_1 + x_1)}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{2k_1 + kt}}{\sqrt{m}}\right) + \left(\frac{-y_0 + x_0}{\sqrt{m}}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{2k_1 + kt}}{\sqrt{m}}\right) \end{bmatrix}$$

3.3 2.2 の対角化

2.2 は非線形の微分方程式であった、式とその解は、

$$\frac{dx}{dt} = ax^2, \quad x(0) = x_0 \qquad x = \frac{1}{-at + \frac{1}{x_0}}$$

であり、この作用マトリックス表現は、

$$\begin{bmatrix} x \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta a \\ S(x) & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x_0 \\ R \end{bmatrix}$$

これは文献[2]と同様な方法で対角化を行えば、

$$\Lambda_k^n \rightarrow \begin{bmatrix} e^{kat} & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

より、

$$\exp ka \delta t_k = \frac{k}{k-1}$$

$$\delta t_k = \frac{1}{ka} \log \left(\frac{k}{k-1} \right)$$

ここで \log の中の k は分割 X_k を表しているか

ら $k/(k-1)$ は $X/(X-dX)$ とし、 a にかかる k は $S(X)$ に関するものだから、 X と書き換えて、

$$\delta t = \frac{1}{xa} \log \left(\frac{x}{x-dx} \right)$$

$$\delta t = \frac{dx}{x^2 a}$$

$$\int \delta t = \frac{1}{a} \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{a} \left[-\frac{1}{x} \right]_{x_0}^x$$

$$t = -\frac{1}{ax} + \frac{1}{ax_0}$$

以上の計算から、最終的に

$$x = \frac{1}{-at + \frac{1}{x_0}}$$

を得ることから、正しく対応していることが分かる。

3.4 2.4 の対角化

2.4 は非線形の連立微分方程式であった、式とその解は、

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + gxy \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad \frac{x^c y^a}{e^{gx+by}} = \frac{e^{-gx_0-by_0}}{x_0^c y_0^a}$$

であり、この作用マトリックス表現は、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ R \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+a\Delta & 0 & -\Delta b & 0 \\ 0 & 1-c\Delta & 0 & \Delta g \\ S(y) & 0 & & \\ 0 & S(x) & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ R_0 \\ r_0 \end{bmatrix}$$

さきほどと同様に対角化を行う。

$$\Lambda_k^n = \begin{bmatrix} e^{(a-kb)t} & & & & \\ & e^{(-c+kg)t} & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \delta t = \frac{\log\left(\frac{X}{X-dX}\right)}{a-Yb}$$

$$\frac{dX}{\delta t} = aX - bXY$$

Y についても同様に、

$$\frac{dY}{\delta t} = -cY + gXY$$

より、まず X については、

$$\exp((a-kb)\delta t_k) = \frac{X_k}{X_{k-1}} = \frac{k}{k-1}$$

$$\delta t_k = \frac{\log\left(\frac{k}{k-1}\right)}{a-kb}$$

ここで log 中の k は分割 X_k を表しているから $k/(k-1)$ は $X/(X-dX)$ とし、b にかかる k は S(y) に関するものだから、Y と書き換えて、

が得られ、 $dY/\delta t$ を $dX/\delta t$ で割り積分すると、

$$\frac{dY}{\delta t} \cdot \frac{\delta t}{dX} = \frac{-cY + gXY}{aX - bXY}$$

$$\int_{Y_0}^Y \frac{a-bY}{Y} dY = \int_{X_0}^X \frac{-c+gX}{X} dX$$

$$bY_0 + a \log(Y_0) - bY + a \log(Y) = gX - c \log(X) - gX_0 - c \log(X_0)$$

以上の計算から、その指数表示を得ると、

$$\frac{x^c y^a}{e^{gx+by}} = \frac{e^{-gx_0-by_0}}{x_0^c y_0^a}$$

を得ることから、正しく対応していることが分かる。

以上で一通りの説明を完了した。ここでは4つの方程式を扱った、線形微分方程式、簡単な非線形方程式と、連立されたものとして連成振動とロトカ・ヴォルテラ方程式を例とした。いずれの方程式に対しても本稿の手順を用いて作用マトリックス表現が導かれることを示し、さらにそれによって導かれたものが、もとの微分方程式と正しく対応していることを対角化解法によって示した。

ここに例示しなかった他の微分方程式についても同様な結果が得られるはずであり、また手順が明確化されたことにより、今後さらに多くの例が示され、作用マトリックスと微分方程式との対応関係が確認されることが期待できる。

参考文献

- [1] S. Naganuma. Reports of Path Finder Physics, Vol.1, pp.1-10 (2002)
- [2] S,Naganuma,Rep.Path Find.Phys.,Vol.1,pp.54-61(2003)
- [3] 長沼伸一郎著,物理数学の直観的方法 第2版 (通商産業研究社), pp.216-231

2005.5.8